LES SUITES NUMERIQUES

I- Suites Arithmétiques

1) Définition :

La suite (u_n) est dite arithmétique quand pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = u_n + r$

r est appelé la raison de la suite (u_n)

2) Propriété : u_n en fonction de n

(u_n) suite arithmétique de premier terme u_p, de raison r

$$u_n = u_p + (n - p)\, r$$

Remarque : si le premier terme de la suite est u_0, $u_n = u_0 + n\, r$

3) Théorème : Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

$$S = u_p + u_{p+1} + \ldots\ldots + u_{n-1} + u_n = (n - p + 1)\frac{u_p + u_n}{2}$$

Soit : $S = (\textit{nombre de termes})\dfrac{1^{er}\ terme + dernier.terme}{2}$

Cas particulier : $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

II- Suites Géométriques

1) Définition :

La suite (u_n) est dite géométrique quand pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = q u_n$

q est appelé la raison de la suite (u_n)

2) Propriété : u_n en fonction de n

(u_n) suite géométrique de premier terme u_p, de raison q

$$u_n = u_p\, q^{(n-p)}$$

Remarque : si le premier terme de la suite est u_0, $u_n = u_0\, q^n$

3) Théorème : Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Si $q \neq 1$ $\quad S = u_p + u_{p+1} + \ldots\ldots + u_{n-1} + u_n = u_p \dfrac{1 - q^{(n-p+1)}}{1 - q}$

Soit $\quad S = (1^{er}\ \textit{terme}) \dfrac{1 - q^{(nombre.de.termes)}}{1 - q}$

Si q = 1, *(sans intérêt)* $\quad S = (n - p + 1)u_p$

Soit $\quad S = (\textit{nombre de termes}) \times (1^{er}\ \textit{terme})$

Cas particuliers : $1 + q + q^2 + \ldots\ldots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

III- Variations des suites

- Pour trouver les variations d'une suite : On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$

Si $u_{n+1} - u_n > 0$	(u_n) croissante
Si $u_{n+1} - u_n < 0$	(u_n) décroissante
Si $u_{n+1} - u_n = 0$	(u_n) constante

- Si tous les termes de la suite sont strictement positifs, on peut aussi calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$	(u_n) croissante
Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$	(u_n) décroissante
Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$	(u_n) constante

IV- Convergence des suites

1) Définitions

- La suite (u_n) est **majorée** par un nombre réel M si et seulement si tous les termes de (u_n) sont inférieurs à M.

- La suite (u_n) est **minorée** par un nombre réel m si et seulement si tous les termes de (u_n) sont supérieurs à m.

- Une suite (u_n) est **convergente** si et seulement si elle admet une limite finie quand n tend vers l'infini.
  C'est-à-dire que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ avec $\ell \in \Re$

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{u}_n = \ell$ avec $\ell \in \Re$ si et seulement si tout intervalle contenant ℓ contient tous les termes de (u_n) à partir d'un certain rang.

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{u}_n = +\infty$ si et seulement si pour tout réel M, $u_n > M$ à partir d'un certain rang.

2) Propriétés et théorèmes

- Cas particulier : limites en l'infini de q^n

Si $q \leq -1$	q^n n'a pas de limite quand n tend vers l'infini.
Si $-1 < q < 1$	$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
Si $q = 1$	$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$
Si $q > 1$	$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

- Si (u_n) est croissante et majorée alors (u_n) converge

- Si (u_n) est décroissante et minorée alors (u_n) converge

- **ROC : Montrons qu'une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$**

  a) ***Prérequis*** : par définition $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si et seulement si tout intervalle $]\lambda;+\infty[$, $(\lambda \in \Re)$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang p

  b) Démonstration :

  Soit un intervalle $]\lambda;+\infty[$ $(\lambda \in \Re)$

  (u_n) n'est pas majorée donc pour tout λ, il existe $p \in N$ tel que $u_p > \lambda$

  (u_n) est croissante donc pour tout $n \geq p$, $u_n \geq u_p$

  Donc $\forall\ \lambda$ réel et $\forall\ n \geq p$ $\qquad u_n \geq u_p > \lambda$

  Donc l'intervalle $]\lambda;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang p

  Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

- Théorème des gendarmes : Si, pour tout n $v_n \leq u_n \leq w_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

V. Suites adjacentes

1) Définition

Deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si et seulement si les 2 conditions suivantes sont réalisées :

1) (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante
2) $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$

2) Théorèmes

- *Théorème 1* : si (u_n) et (v_n) sont adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante, alors, pour tout n, $u_n < v_n$

- *Théorème 2* : si (u_n) et (v_n) sont adjacentes alors elles convergent vers la même limite.

- **ROC** : *Démonstration du théorème 2* :

  (u_n) est croissante donc pour tout n $u_n \geq u_0$
  (v_n) est décroissante donc pour tout n $v_n \leq v_0$
  (u_n) et (v_n) sont adjacentes donc $u_n < v_n$

  Donc $u_0 \leq u_n < v_n \leq v_0$

  Donc (u_n) est croissante et majorée par v_0 donc (u_n) converge
  Et (v_n) est décroissante et minorée par u_0 donc (v_n) converge

  De plus, en posant $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$, on a $l = l'$
  Donc (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.