ETUDE DE FONCTIONS

Partie 3 : Limites et asymptotes

Le but de ce chapitre est d'étudier la fonction aux « bornes » de son domaine de définition.

I. Généralités - Définitions

- Une fonction f tend vers l'infini quand x tend vers l'infini si, pour tout réel M, f(x) > M quand x est assez grand.
- Une fonction f tend vers l'infini quand x tend vers un réel *a* si, pour tout réel M, f(x) > M quand x est assez proche de *a*.
- Une fonction f tend vers un réel *a* quand x tend vers l'infini si, f(x) appartient à tout intervalle contenant *a*, quand x est assez grand.

II. Calculs sur les limites

(*Dans la suite*, **FI** *veut dire Forme Indéterminée*).

1) Somme

Lim f	*l*	*l*	*l*	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Lim g	*l'*	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Lim f+g	*l + l'*	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	***FI***

2) Produit

Lim f	*l*	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	*0*
Lim g	*l'*	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
Lim fxg	*l.l'*	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	***FI***

3) Quotient

Lim f	*l*	*l*	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ *ou* $-\infty$
Lim g	$l' \neq 0$	$+\infty$ *ou* $-\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$+\infty$ *ou* $-\infty$
$Lim\ \frac{f}{g}$	$\frac{l}{l'}$	*0*	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	***FI***

Lim f	$l > 0$ *ou* $+\infty$	$l > 0$ *ou* $+\infty$	$l < 0$ *ou* $-\infty$	$l < 0$ *ou* $-\infty$	*0*
Lim g	0^+	0^-	0^+	0^-	*0*
$Lim\ \frac{f}{g}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	***FI***

4) Les formes indéterminées sont donc :

$\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$

III. Théorème de comparaison *dit Théorème des gendarmes*

a) si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

alors $\lim_{x\to a} g(x) \leq \lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} h(x)$ $\quad a \in \mathbb{R}$ ou $a = \pm\infty$

b) ce théorème est utile si $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x)$

donc on peut en déduire que $\lim_{x\to a} f(x)$

c) on l'utilise aussi

si $|f(x) - l| \leq g(x)$ et $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ alors $\lim_{x\to a} f(x) = l$

IV. Limite et taux de variation

- si g est dérivable en *a* et que $f(x) = \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}$

alors $\lim_{x\to a} f(x) = g'(a)$

- si g est dérivable en *a* et que $f(x) = \dfrac{g(a+x)-g(a)}{x}$

alors $\lim_{x\to 0} f(x) = g'(a)$

V. Polynôme

La limite en $+\infty$ ou $-\infty$ d'un polynôme est la limite en $+\infty$ ou $-\infty$ de son terme de plus haut degré.

VI. Asymptotes

Soient *a* et *l* deux réels

- si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ alors $x = a$ est asymptote verticale à la courbe de f
- si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = l$ alors $y = l$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $\pm\infty$
- si $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ alors D : $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe de f en $\pm\infty$

  Autre présentation : si $f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to\pm\infty} \varepsilon(x) = 0$ alors D : $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe de f en $\pm\infty$
- si $f(x) - (ax + b) > 0$ Cf au dessus de D

  si $f(x) - (ax + b) < 0$ Cf en dessous de D

Remarque : Si on cherche à savoir si f admet une asymptote oblique en $+\infty$ (même raisonnement en $-\infty$)

condition : il faut que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$

si tel est le cas, calculer $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

si $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$, il n'y a pas d'asymptote oblique

si $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$, on calcule $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = b$

et D : $y = ax + b$ est asymptote oblique en $+\infty$