ETUDE DE FONCTIONS

Partie 2 : Continuité - Dérivabilité

I. Continuité

Une fonction est dite continue si quand on trace sa courbe, on n'a pas besoin de « décoller » le crayon.

Plus rigoureusement, une fonction f est continue en a ssi $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

Remarque : La somme, le produit, le quotient ou la composée de fonctions continues est continue

Théorème de la valeur intermédiaire (ou de la bijection)

- si f est continue sur $[a,b]$ et f strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur $[a,b]$ et si c$\in [f(a); f(b)]$ (resp. c$\in [f(b); f(a)]$) alors il existe une et une seule valeur $\alpha \in [a,b]$ telle que f(x) = c
- si f est continue sur $]a,b[$ et f strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur $]a,b[$ et si c$\in \left]\lim_{x\to a} f(x); \lim_{x\to b} f(x)\right[$ (resp. c$\in \left]\lim_{x\to b} f(x); \lim_{x\to a} f(x)\right[$) alors il existe une et une seule valeur $\alpha \in]a,b[$ telle que f(x) = c

II. Dérivabilité

- Une fonction est dite dérivable en un point A si sa courbe en A a la même tangente à droite et à gauche et que cette tangente n'est pas verticale.
- Plus rigoureusement, f dérivable en a ssi f continue en a, et
  $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ = f '(a) avec f '(a)$\in \Re$
  Alors f'(a) est appelé nombre dérivé en a.
- ***Autre présentation*** : f est dérivable en a ssi f continue en a et
  $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ = f '(a) avec f '(a) $\in \Re$
  Alors f '(a) est le nombre dérivée en a.

- ***Propriétés*** : Si f est dérivable en a alors f est continue en a.
  Si f n'est pas continue en a alors f n'est pas dérivable en a.

III. Tangente

Ce nombre dérivé définit au II) est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point considéré.

L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est :

y = f '(a) (x-a) + f(a)

Donc graphiquement la dérivée est la « pente » de la courbe en un point.

IV. Sens de variation et dérivée

La dérivée de f en a n'est autre que le taux de variation entre M(x ; f(x)) et A(a, f(a)) quand x tend vers a (en effet, f'(a) = $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$)

donc si f '(x)≥ 0 f croissante

si f '(x)≤ 0 f décroissante

V. Fonctions dérivées

f(x)	f ’(x)
k = constante	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
Lnx	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
cos x	-sin x
sin x	cos x
tan x	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

f	f ’
ku	*ku’*
u + v	*u’ + v’*
u x v	*u’v + uv’*
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
v(u)	*v’(u) x u’*
u^n	$nu^{n-1}u'$
$\frac{1}{u^n}$	$-\frac{nu'}{u^{n+1}}$
ln(u)	$\frac{u'}{u}$
e^u	$u'e^u$

- les fonctions polynômes sont dérivables sur $\Re$
- les fonctions rationnelles sont dérivables sur leur ensemble de définition
- les fonctions sin et cos sont dérivables sur $\Re$
- tan x est dérivables sur $\Re - \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi; k \in Z\right\}$
- ln x est dérivable sur $]0;+\infty[$
- e^x est dérivable sur $\Re$
- ATTENTION : $x \to \sqrt{x}$ est définie sur $[0;+\infty[$ mais elle est dérivable sur $]0;+\infty[$, $\sqrt{x}$ n’est pas dérivable en 0, elle y admet une tangente verticale.