Série S

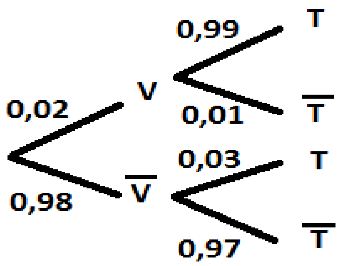
France métropolitaine 21 juin 2011 : Corrigé

Exercice 1

Partie A

1)

a) p(V) = 0,02 $\quad p_V(T) = 0{,}99 \quad\quad p_{\overline{V}}(\overline{T}) = 0{,}97$



b) $p(V \cap T) = \text{p(V)} \times p_V(T) = 0{,}02 \,.\, 0{,}99 = 0{,}0198$

2) P(T)= $p(V \cap T) + p(\overline{V} \cap T)$ d'après la loi des probabilités totales
$= 0\,,0198 + 0{,}98 \,.\, 0{,}03 = 0{,}0492$

3)

a) $p_T(V) = \dfrac{p(V \cap T)}{p(T)} = \dfrac{0{,}0198}{0{,}0492} = 0{,}4024 \approx 40\%$

b) $p_{\overline{T}}(\overline{V}) = \dfrac{p(\overline{V} \cap \overline{T})}{p(\overline{T})} = \dfrac{0{,}98 \times 0{,}97}{1 - 0{,}0492} = 0{,}9998$

Partie B

1) Il s'agit d'une épreuve à deux issues : Succès = V et Echec = $\overline{V}$. On répète cette épreuve 10 fois de façon indépendante. X compte le nombre de succès, donc X suit une loi binomiale de paramètres
n= 10 et p = p(V) = 0,02

2) $p(X \geq 1)$ = 1- p(X=0) = 1-(0,98)^{10} = 0,1829

Exercice 2

1) $z_E = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(1-i)$

2) La médiatrice de [AD]

3) Le cercle de diamètre [CD] privé de C

4) La demi droite]BD) d'origine B, passant par D, privée de B.

Exercice 3

$f_n(x) = x^n e^{-x}$

Partie A

1)

a) $f_1(x) = xe^{-x}$

$$\lim_{x \to -\infty} -x = +\infty \text{ et } \lim_{t \to +\infty} e^t = +\infty \text{ donc } \lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \to -\infty} f_1(x) = -\infty$$

$$f_1(x) = xe^{-x} = \frac{x}{e^x} \text{ or } \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ et donc } \lim_{x \to +\infty} f_1(x) = 0$$

b) $f_1'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1 - x)\, e^{-x}$

$e^{-x} > 0$ donc $f_1'(x)$ est du signe de $(1-x)$

donc si $x < 1$, $1 - x > 0$ donc $f_1'(x) > 0$

et si $x > 1$, $1 - x < 0$ donc $f_1'(x) < 0$

x	-00		1		+00
f₁'(x)		+	0	-	
f₁	-00	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

c) D'après le tableau de variations de f_1, on voit que C_k ne peut pas être C_1. Donc $k \neq 1$ or $k \geq 1$

Donc $k > 1$ et donc $k \geq 2$

2)

a) Soient n et p deux entiers naturels non nuls tels que $n > p$

$f_n(x) = f_p(x)$ équivaut à $x^n e^{-x} = x^p e^{-x}$

soit $x^n e^{-x} - x^p e^{-x} = 0$

soit $x^p e^{-x} (x^{n-p} - 1) = 0$ or $e^{-x} > 0$

soit $x^p (x^{n-p} - 1) = 0$ d'où $x = 0$ ou $x^{n-p} - 1 = 0$

soit $x = 0$ ou $x^{n-p} = 1$

soit $x = 0$ ou $x = 1$

Donc toutes les courbes C_n ont deux points communs :

Quand $x = 0$ $y = f_n(0) = 0$

Quand $x = 1$ $y = f_n(1) = e^{-1}$

b) $f_n(x) = x^n e^{-x}$ donc $f_n'(x) = n\, x^{n-1} e^{-x} - x^n e^{-x} = x^{n-1} (n - x)\, e^{-x}$

3) $f_3(x) = x^3 e^{-x}$ et $f_3'(x) = x^2 (3 - x)\, e^{-x}$

$x^2 \geq 0$ et $e^{-x} > 0$ donc $f_3'(x)$ est du signe de $3 - x$

Donc quand $x < 3$ $f_3'(x) > 0$ et $f_3(x)$ est croissante

Et quand $x \geq 3$ $f_3'(x) < 0$ et $f_3(x)$ est décroissante

f_3 est croissante jusqu'à $x = 3$ puis décroissante ensuite donc f_3 admet un maximum en $x = 3$.

4)

a) $T_k : y = f_k'(1)(x-1) + f_k(1)$ or $f_k'(1) = 1^{k-1}(k-1)e^{-1} = (k-1)e^{-1}$ et $f_k(1) = 1^k e^{-1} = e^{-1}$

Donc $T_k : y = (k-1)e^{-1}(x-1) + e^{-1} = ((k-1)x - k + 1 + 1)e^{-1} = ((k-1)x - k + 2)e^{-1}$

T_k coupe l'axe des abscisses quand y = 0 donc quand (k - 1) x – k + 2 = 0 puisque $e^{-1} \neq 0$

Donc quand $x = \dfrac{k-2}{k-1}$

Donc T_k coupe l'axe des abscisses en $\left(\dfrac{k-2}{k-1};0\right)$

b) On sait que T_k coupe l'axe des abscisses en A $\left(\dfrac{4}{5};0\right)$ donc k – 2 = 4 et k – 1 = 5 donc k = 6

Partie B

$I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$

1) $I_1 = \int_0^1 xe^{-x}dx$ en prenant u'(x) = e^{-x} et v(x) = x on a u(x) = $-e^{-x}$ et v'(x) = 1. Donc par intégration par parties

$$I_1 = \left[-xe^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}dx = -e^{-1} + 0 - \left[e^{-x}\right]_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + e^0 = 1 - 2e^{-1} = 1 - \frac{2}{e}$$

2)

a) $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$ avec $f_n(x) \geq 0$ sur [0 ;1] donc I_n représente l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par C_n, l'axe des abscisses et la verticale x = 1.

On voit graphiquement que plus n augmente, plus cette aire diminue, donc I_n semble être décroissante.

b) $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 f_{n+1}(x)dx - \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \left(f_{n+1}(x) - f_n(x)\right)dx = \int_0^1 \left(x^{n+1}e^{-x} - x^n e^{-x}\right)dx$

$= \int_0^1 x^n(x-1)e^{-x}dx$ or $x \in [0;1]$ donc $x^n \geq 0$ et $x - 1 \leq 0$ comme $e^{-x} > 0$

On a $x^n(x-1)e^{-x} \leq 0$ sur [0 ;1] donc $\int_0^1 x^n(x-1)e^{-x}dx \leq 0$ et donc $I_{n+1} - I_n \leq 0$

Donc (I_n) est décroissante.

c) On a vu que $f_n(x) \geq 0$ sur [0 ;1] donc $I_n \geq 0$. Donc (I_n) est décroissante et minorée par 0, donc (I_n) converge.

d) $0 \le x \le 1$ donc $e^{-1} \le e^{-x} \le 1$ donc $x^n e^{-1} \le x^n e^{-x} \le x^n$ puisque $x^n \ge 0$

Donc $\int_0^1 x^n e^{-1} dx \le \int_0^1 x^n e^{-x} dx \le \int_0^1 x^n dx$

Donc $e^{-1}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \le I_n \le \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

Donc $e^{-1}\left(\frac{1}{n+1} - 0\right) \le I_n \le \left(\frac{1}{n+1} - 0\right)$

Donc $\frac{e^{-1}}{n+1} \le I_n \le \frac{1}{n+1}$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e^{-1}}{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

Exercice 4 (Enseignement Obligatoire)

Partie A

1) H projeté orthogonal de M_0 sur P donc : $\overrightarrow{M_0H}$ est normal à P. Donc $\overrightarrow{M_0H}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires donc $\overrightarrow{M_0H} \cdot \vec{n} = \pm M_0H \times \|\vec{n}\|$ donc $|\overrightarrow{M_0H} \cdot \vec{n}| = M_0H \times \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

2) $\overrightarrow{M_0H} \cdot \vec{n} = a(x_H - x_0) + b(y_H - y_0) + c(z_H - z_0) = ax_H + by_H + cz_H - ax_0 - by_0 - cz_0$

Or H est sur P donc $ax_H + by_H + cz_H + d = 0$ et donc $ax_H + by_H + cz_H = -d$

Donc $\overrightarrow{M_0H} \cdot \vec{n} = -ax_0 - by_0 - cz_0 - d$ et donc $|\overrightarrow{M_0H} \cdot \vec{n}| = |ax_0 + by_0 + cz_0 + d|$

3) D'après les deux expressions du 1) et du 2) : $M_0H \times \sqrt{a^2+b^2+c^2} = |ax_0 + by_0 + cz_0 + d|$

Donc $M_0H = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Partie B

1)

a) $\overrightarrow{AB}$ (-7 ; 1 ; -5) et $\overrightarrow{AC}$ (-3 ; 2 ; 1)

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, puisque leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles, donc A, B et C ne sont pas alignés, donc ils définissent bien un plan P.

Soit $\vec{n}$ (1 ; 2 ; -1) $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \times (-7) + 2 \times 1 + (-1) \times (-5) = -7 + 2 + 5 = 0$ donc $\vec{n}$ orthogonal à $\overrightarrow{AB}$

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times (-3) + 2 \times 2 + (-1) \times 1 = -3 + 4 - 1 = 0$ donc $\vec{n}$ orthogonal à $\overrightarrow{AC}$

Donc $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan P, donc $\vec{n}$ est normal au plan P.

Donc P : x + 2y – z + d = 0 or $A \in P$ donc $x_A + 2y_A - z_A + d = 0$ donc 4 + 2 – 5 + d = 0

Donc d = - 1 et P : x + 2y – z – 1 = 0

b) d (F ; P) = $\dfrac{|-7+2\times 0-4-1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}} = \dfrac{|-12|}{\sqrt{6}} = \dfrac{12}{\sqrt{6}} = \dfrac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6}$

2)

a) Δ est perpendiculaire à P donc $\vec{n}$ (1 ; 2 ; -1), normal à P, est directeur de Δ.

Donc Δ : $\begin{cases} x = -7+t \\ y = 2t \\ z = 4-t \end{cases}$, avec t réel

b) $H = \Delta \cap P$ donc en posant H (x ; y ; z), on a x + 2y – z – 1 = 0
Donc - 7 + t + 2 (2t) – (4 – t) – 1 = 0
Donc - 7 + t + 4t – 4 + t – 1 = 0
Donc 6t – 12 = 0 et t = 2
Donc H (-5 ; 4 ; 2)

c) FH = $\sqrt{(-5+7)^2+(4-0)^2+(2-4)^2} = \sqrt{2^2+4^2+2^2} = \sqrt{4+16+4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

Donc on retrouve bien : d (F ; P) = $2\sqrt{6}$

3)

a) FB = $\sqrt{(-7+3)^2+(0-2)^2+(4-0)^2} = \sqrt{4^2+2^2+4^2} = \sqrt{36} = 6$

Donc B est bien sur la sphère S

b) Le centre du cercle C, intersection de la sphère S et du plan P, est le projeté orthogonal de F sur P.
C'est donc H
HBF est un triangle rectangle en H. Donc d'après le théorème de Pythagore :

$FB^2 = FH^2 + HB^2$ donc $6^2 = d^2(F;P) + r^2$ donc $r^2 = 36-(2\sqrt{6})^2$ donc $r^2 = 36-24 = 12$

Donc $r = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Donc le cercle C, intersection de la sphère S et du plan P, est de centre H (-5 ; 4 ; 2) et de rayon r = $2\sqrt{3}$

<u>Exercice 4 (Enseignement de spécialité)</u>

<u>Partie A</u>

1) a et b sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Bézout, il existe u et v entiers tels que :
a u + b v = 1 donc b v = 1 – a u
a divise b c donc il existe k entier tel que b c = k a
donc b c v = k a v et donc (1 – a u) c = k a v
donc c – a u c = k a v donc c = a u c + a k v = a (u c + k v)
Donc a divise c

2) $a \equiv 0[p]$ donc il existe un entier u tel que a = u p
$a \equiv 0[q]$ donc q divise a donc q divise u p
Comme p et q sont premiers entre eux, q divise u (d'après le théorème de Gauss)
Donc il existe v entier tel que u = q v
Donc a = v q p donc $a \equiv 0[qp]$

Partie B

$n \equiv 9[17]$ et $n \equiv 3[5]$

1)

a) 17 et 5 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers u et v tels que : 17 u + 5 v = 1

b) $n_0 = 3\times17u + 9\times5v$ or 5 v = 1 – 17 u

Donc $n_0 = 3\times17u + 9(1-17u)$ = 9 – 6 × 17 u donc $n_0 \equiv 9[17]$

$n_0 = 3\times17u + 9\times5v$ or 17 u = 1 – 5 v

Donc $n_0 = 3\times(1-5v) + 9\times5v$ = 3 + 6×5 v donc $n_0 \equiv 3[5]$

Donc n_0 appartient à S

c) Exemple : prenons u = 3 et v = - 10 on a bien $17\times3 + 5\times(-10) = 1$

Dans ce cas : $n_0 = 3\times17\times3 + 9\times5\times(-10)$ = - 297

2)

a) $n \equiv 9[17]$ et $n \equiv 3[5]$ comme $n_0 \equiv 9[17]$ et $n_0 \equiv 3[5]$

On a $n - n_0 \equiv 0[17]$ et $n - n_0 \equiv 0[5]$

Comme 17 et 5 sont premiers entre eux, d'après la partie A 2), on a $n - n_0 \equiv 0[85]$

b) Si n appartient à S, $n - n_0 \equiv 0[85]$ donc il existe un entier p tel que $n - n_0 = 85$ p

Donc n = n_0 + 85 p = - 297 + 85 p = - 4 × 85 + 43 + 85 p = 43 + 85 (p – 4)
Soit en posant k = p – 4 n = 43 + 85 k
Réciproquement :
Si n = 43 + 85 k

- n = 2×17 + 9 + 5×17 k = 9 + 17×(2 + 5 k) donc $n \equiv 9[17]$
- n = 8×5 + 3 + 17×5 k = 3 + 5×(8 + 17 k) donc $n \equiv 3[5]$

Donc n appartient à S
Donc n appartient à S si et seulement si n = 43 + 85 k

3) Soit n le nombre de jetons de Zoé.

$n \equiv 9[17]$ et $n \equiv 3[5]$ donc n appartient à S donc n = 43 + 85 k
Or $300 \le n \le 400$ donc $300 \le 43 + 85k \le 400$ donc $257 \le 85k \le 357$
Donc $3{,}02 \le k \le 4{,}2$ donc k = 4
Donc n = 43 + 85×4 = 383
Donc Zoé a 383 jetons.