Série S

France métropolitaine 22 juin 2010 : Corrigé

Exercice 1

Partie A

(E) : $y' + y = e^{-x}$

1) $u(x) = x e^{-x}$ donc $u'(x) = e^{-x} - x e^{-x}$
   donc $u'(x) + u(x) = e^{-x} - x e^{-x} + x e^{-x} = e^{-x}$ donc u est solution de (E)
2) (E') : $y' + y = 0$ donc $y' = -y$ donc $y(x) = k e^{-x}$
3) v solution de (E) $\Rightarrow$ $v' + v = e^{-x}$ or $u' + u = e^{-x}$
   $\Rightarrow$ $v' + v = u' + u$
   $\Rightarrow$ $v' - u' + v - u = 0$
   $\Rightarrow$ $(v - u)' + (v - u) = 0$
   $\Rightarrow$ $(v - u)$ est solution de (E')

   Réciproquement :

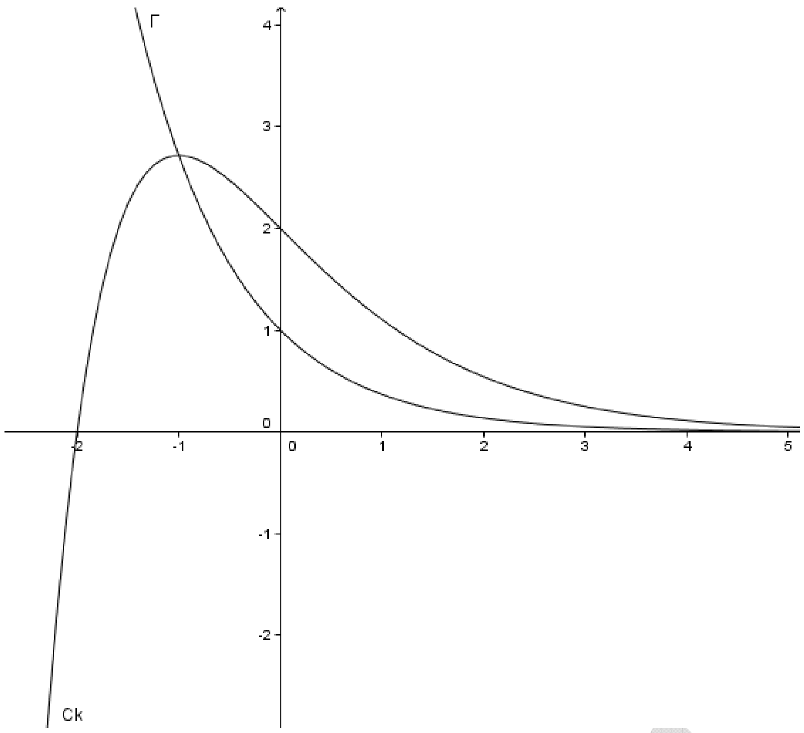
   $(v - u)$ est solution de (E') $\Rightarrow$ $(v - u)' + (v - u) = 0$
   $\Rightarrow$ $v' + v - u' - u = 0$
   $\Rightarrow$ $v' + v = u' + u$ or $u' + u = e^{-x}$
   $\Rightarrow$ $v' + v = e^{-x}$ donc v est solution de (E)
4) v est solution de (E) $\Leftrightarrow$ $(v - u)$ est solution de (E')
   $\Leftrightarrow$ $(v - u)(x) = k e^{-x}$
   $\Leftrightarrow$ $v(x) - x e^{-x} = k e^{-x}$
   $\Leftrightarrow$ $v(x) = x e^{-x} + k e^{-x}$
   $\Leftrightarrow$ $v(x) = (x + k) e^{-x}$
5) g est solution de (E) donc $g(x) = (x + k) e^{-x}$
   Comme $g(0) = 2$ on a $(0 + k) e^{-0} = 2$ et donc $k = 2$
   Donc $g(x) = (x + 2) e^{-x}$

Partie B

$f_k(x) = (x + k) e^{-x}$ sur R

1) Etudions les variations de f_k :
   $f_k'(x) = e^{-x} - (x + k)e^{-x} = (1 - k - x) e^{-x}$
   $e^{-x} > 0$ donc $f_k'(x)$ est du signe de $(1 - k - x)$
   Donc si $x < 1 - k$ alors $f_k'(x) > 0$ et f_k est croissante
   Et si $x < 1 - k$ alors $f_k'(x) < 0$ et f_k est décroissante
   Donc f_k admet un maximum en $x = 1 - k$
2) $M_k(1 - k ; f_k(1 - k))$ or $f_k(1 - k) = (1 - k + k) e^{-(1-k)} = e^{-(1-k)}$
   Donc $M_k(1 - k ; e^{-(1-k)})$ et donc M_k est bien sur Γ

3)



a) La dérivée de (e^{-x}) est $-e^{-x}$ qui est toujours négative donc Γ est la courbe de la fonction toujours décroissante.

b) $e^{0} = 1$ donc Γ coupe l'axe des ordonnées en y = 1, ce qui permet de graduer l'axe des ordonnées. On en déduit que C_k coupe l'axe des ordonnées en y = 2 donc $(0 + k)\, e^{0} = 2$ et donc k = 2.
Comme k = 2 , C_k représente la fonction g de la partie A et g(x) = 0 donne $(x + 2)\, e^{-x} = 0$
Donc, comme $e^{-x} \neq 0$, x + 2 = 0 et donc x = - 2 . Donc C_k coupe l'axe des abscisses en x = - 2 ce qui permet de graduer l'axe des abscisses.

4) Posons $u(x) = x + 2$ $\quad u'(x) = 1$
$v'(x) = e^{-x}$ $\quad v(x) = - e^{-x}$

donc $\int_0^2 (x+2)e^{-x}dx = \left[-(x+2)e^{-x}\right]_0^2 - \int_0^2 -e^{-x}dx = -4e^{-2} + 2 - \left[e^{-x}\right]_0^2$

$= -4e^{-2} + 2 - e^{-2} + 1 = 3 - 5e^{-2}$ = 2,323 à 10^{-3} près

C'est l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par : C_2, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la verticale x = 2.

Exercice 2

1) Soient (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes telles que (u_n) soit croissante et (v_n) décroissante.
Comme (u_n) est croissante, pour tout n, $u_n \geq u_0$
Comme (v_n) est croissante, pour tout n, $v_n \leq v_0$
La propriété 1nous donne : pour tout n, $v_n \geq u_n$
Donc $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$
Donc (u_n) est croissante et majorée par v_0 donc (u_n) converge
Et (v_n) est décroissante et minorée par u_0 donc (v_n) converge
Posons : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$ comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$ on a : $l' - l = 0$ et donc $l = l'$

Et donc on a bien : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

2)

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} -n = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} 10^X = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 10^{-n} = 0$

Donc (u_n) et (v_n) convergent toutes les deux vers 1

$v_n - u_n = 1 + 10^{-n} - 1 + 10^{-n} = 2 \times 10^{-n}$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} 10^{-n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$

$u_{n+1} - u_n = 1 - 10^{-n-1} - 1 + 10^{-n} = 10^{-n} - 10^{-n-1} = 10^{-n-1}(10-1) = 9 \times 10^{-n-1} > 0$

Donc (u_n) est croissante

$v_{n+1} - v_n = 1 + 10^{-n-1} - 1 - 10^{-n} = 10^{-n-1} - 10^{-n} = 10^{-n-1}(1-10) = -9 \times 10^{-n-1} < 0$

Donc (v_n) est décroissante

Donc (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n+1 = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

Donc (u_n) et (v_n) ont la même limite, mais comme elles divergent, elles ne peuvent être adjacentes.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

$-1 \le (-1)^n \le 1$ comme $n > 0$ $-\frac{1}{n} \le \frac{(-1)^n}{n} \le \frac{1}{n}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc par application du théorème des gendarmes,

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$

Donc (u_n) et (v_n) ont la même limite.

$v_1 = 1 + \frac{-1}{1} = 0$; $v_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$; $v_3 = 1 + \frac{-1}{3} = \frac{2}{3}$ on a donc : $v_1 \le v_2$ et $v_2 \ge v_3$

Donc la suite (v_n) n'est pas monotone et donc les suites (u_n) et (v_n) ne peuvent être adjacentes.

3) $a > 0$ $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = \ln\left(a + \frac{1}{n}\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} a + \frac{1}{n} = a$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ln(a)$

Pour que (u_n) et (v_n) puissent être adjacentes il faut donc que $\ln(a) = 1$, et donc que $a = e$

On a vu au 2) c) que (u_n) était croissante.

$v_n = \ln\left(e + \frac{1}{n}\right)$ donc $v_{n+1} - v_n = \ln\left(e + \frac{1}{n+1}\right) - \ln\left(e + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{e + \frac{1}{n+1}}{e + \frac{1}{n}}\right) = \ln\left(\frac{n(n+1)e + n}{n(n+1)e + n + 1}\right)$

Or $n(n+1)e + n + 1 > n(n+1)e + n$ et donc $\frac{n(n+1)e + n}{n(n+1)e + n + 1} < 1$

Donc : $\ln\left(\frac{n(n+1)e + n}{n(n+1)e + n + 1}\right) < 0$ et donc (v_n) est décroissante.

$v_n - u_n = \ln\left(e+\frac{1}{n}\right)-1+\frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = \ln(e)-1=1-1=0$

Donc quand a = e les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Or on a vu que si a $\neq e$ (u_n) et (v_n) n'ont pas la même limite et ne peuvent donc pas être adjacentes, donc a = e est la seule valeur pour laquelle les suites peuvent être adjacentes.

Exercice 3

1) $\frac{21}{40}$

2) $\binom{5}{2}\left(\frac{3}{10}\right)^3\left(\frac{7}{10}\right)^2$

3) $\frac{14}{23}$

4) $e^{-\lambda}-e^{-3\lambda}$

Exercice 4

1)

a) $\alpha^2-4\alpha = (1+i\sqrt{3})^2-4(1+i\sqrt{3}) = 1+2i\sqrt{3}-3-4-4i\sqrt{3} = -6-2i\sqrt{3}$

$2\overline{\alpha}-8 = 2(1-i\sqrt{3})-8 = 2-2i\sqrt{3}-8 = -6-2i\sqrt{3}$

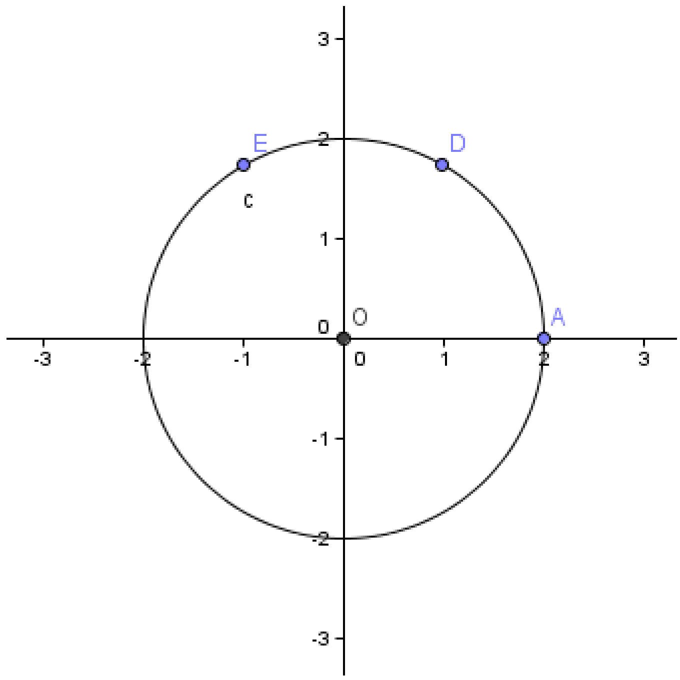
Donc $\alpha^2-4\alpha = 2\overline{\alpha}-8$

b) $|\alpha| = |1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$ Donc OB = 2 donc OB = OA donc B est sur $\mathcal{C}$

$|\overline{\alpha}| = |\alpha| = 2$ Donc OC = 2 donc OC = OA donc C est sur $\mathcal{C}$

2)

a)



b) $z_D = 2e^{i\theta}$

$$z_E = e^{i\frac{\pi}{3}} \times 2e^{i\theta} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{i\theta} = (1 + i\sqrt{3}) = \alpha e^{i\theta}$$

3)

a) $z_F = \dfrac{z_B + z_D}{2} = \dfrac{\alpha + 2e^{i\theta}}{2} = \dfrac{\alpha}{2} + e^{i\theta}$

b) $z_G = \dfrac{\alpha e^{i\theta} + \overline{\alpha}}{2}$

$$\frac{z_G - 2}{z_F - 2} = \frac{\dfrac{\alpha e^{i\theta} + \overline{\alpha}}{2} - 2}{\dfrac{\alpha}{2} + e^{i\theta} - 2} = \frac{\alpha e^{i\theta} + \overline{\alpha} - 4}{\alpha + 2e^{i\theta} - 4} \quad \text{or} \quad \overline{\alpha} - 4 = \frac{\alpha^2 - 4\alpha}{2}$$

Donc $\dfrac{z_G - 2}{z_F - 2} = \dfrac{\alpha e^{i\theta} + \frac{1}{2}(\alpha^2 - 4\alpha)}{\alpha + 2e^{i\theta} - 4} = \dfrac{2\alpha e^{i\theta} + \alpha^2 - 4\alpha}{2\alpha + 4e^{i\theta} - 8} = \dfrac{\alpha(2e^{i\theta} + \alpha - 4)}{2(2e^{i\theta} + \alpha - 4)} = \dfrac{\alpha}{2}$

$\left|\dfrac{z_G - 2}{z_F - 2}\right| = \dfrac{AG}{AF}$ et $\left|\dfrac{\alpha}{2}\right| = \dfrac{|\alpha|}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$ donc $\dfrac{AG}{AF} = 1$ et donc AG = AF

$\arg\left(\dfrac{z_G - 2}{z_F - 2}\right) = (\overrightarrow{AF}; \overrightarrow{AG})$ or $\arg\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \arg(\alpha) = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi$

Donc $(\overrightarrow{AG}; \overrightarrow{AF}) = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi$ et comme AG = AF , AFG est équilatéral.

4) $f(-\pi) = 4 - 3\cos(-\pi) + \sqrt{3}\sin(-\pi) = 4 + 3 = 7$

$$f(-\frac{\pi}{6}) = 4 - 3\cos(-\frac{\pi}{6}) + \sqrt{3}\sin(-\frac{\pi}{6}) = 4 - 3\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 - \frac{4\sqrt{3}}{2} = 4 - 2\sqrt{3}$$

$$f(\frac{5\pi}{6}) = 4 - 3\cos(\frac{5\pi}{6}) + \sqrt{3}\sin(\frac{5\pi}{6}) = 4 + 3\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right) = 4 + \frac{4\sqrt{3}}{2} = 4 + 2\sqrt{3}$$

$$f(\pi) = 4 - 3\cos(\pi) + \sqrt{3}\sin(\pi) = 4 - 3(-1) = 7$$

Donc f est minimale pour x = - $\dfrac{\pi}{6}$ sur $[-\pi; \pi]$

Or AF^2 = f(θ) donc AF^2 minimale pour θ = - $\dfrac{\pi}{6}$

Donc il existe une position de D : $z_D = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ pour laquelle AF est minimale.

Exercice 4 (spécialité)

1)

a) $-\overline{z_A}+2$ = - 1 + 2 = 1= z_A

$-\overline{z_\Omega}+2=-(1-i\sqrt{3})+2=1+i\sqrt{3}=z_\Omega$

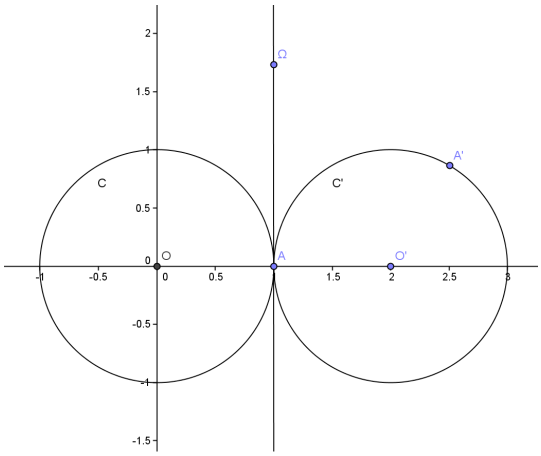
b) T est une similitude indirecte admettant deux points invariants, c'est donc la réflexion d'axe (AΩ).

c) L'image d'un cercle par une réflexion est un cercle de même rayon et de centre l'image du centre.

Donc l'image de $\mathcal{C}$ par T est le cercle de centre T(O) = O' d'affixe : $z_{O'}=-\overline{z_O}+2=2$ et de rayon 1

2)

a)



b) $\left|\frac{z'-2}{z}\right|=\frac{O'M'}{OM}=\frac{1}{1}=1$ et $\arg\left(\frac{z'-2}{z}\right)=(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{O'M'})=\frac{\pi}{3}$ (modulo 2π)

Donc $\frac{z'-2}{z}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc $z'-2=e^{i\frac{\pi}{3}}z$ donc $z'=e^{i\frac{\pi}{3}}z+2$

c) r a une écriture complexe du type z' = a z + b , c'est donc une similitude directe

de rapport : $|a|=1$ d'angle arg(a) = $\frac{\pi}{3}$ et de centre le point dont l'affixe est solution de

$$z=e^{i\frac{\pi}{3}}z+2 \Leftrightarrow z=\frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{3}}}=\frac{2}{1-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4}{1-i\sqrt{3}}=\frac{4(1+i\sqrt{3})}{4}=1+i\sqrt{3}$$

Donc de centre Ω. r est donc la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

3) $z_1=\frac{z'+z}{2}=\frac{z+e^{i\frac{\pi}{3}}z+2}{2}=\frac{1+e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}z+1=\frac{1+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}z+1=\frac{3+i\sqrt{3}}{4}z+1$

Donc $z_1-1=\frac{3+i\sqrt{3}}{4}z$ donc $|z_1-1|=\left|\frac{3+i\sqrt{3}}{4}\right|\times|z|$

Comme M est sur $\mathcal{C}$, $|z|=1$ donc $|z_1-1|=\left|\frac{3+i\sqrt{3}}{4}\right|=\frac{\sqrt{9+3}}{4}=\frac{\sqrt{12}}{4}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc $AM_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc M_1 décrit le cercle de centre A et de rayon $\frac{\sqrt{3}}{2}$