Série STI : Génie électronique, électrotechnique, optique

France métropolitaine 21 juin 2011 : Corrigé

Exercice 1

1) $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0 \quad \Delta = 4\times 2 - 16 = -8$ Donc $z_1 = \dfrac{2\sqrt{2}+i\sqrt{8}}{2} = \dfrac{2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}+i\sqrt{2}$

$z_2 = \overline{z_1} = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

2) $z_A = \sqrt{2}+i\sqrt{2}$ et $z_B = \sqrt{2}-i\sqrt{2}$

a) $|z_A| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{4} = 2$

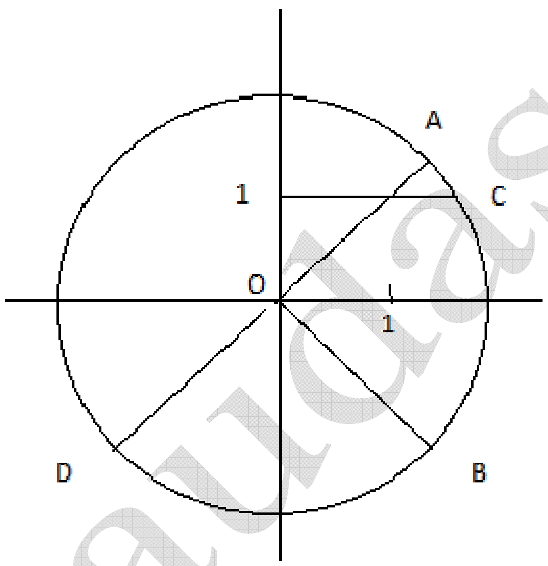
Avec $\theta_A = \arg(z_A)$ on a : $\cos(\theta_A) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\theta_A) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\theta_A = \dfrac{\pi}{4}(2\pi)$

Donc $|z_A| = 2$ et $\arg(z_A) = \dfrac{\pi}{4}$

Comme $z_B = \overline{z_A}$ on a $|z_B| = 2$ et $\arg(z_B) = -\dfrac{\pi}{4}$

b) $|z_A| = 2$ et $\arg(z_A) = \dfrac{\pi}{4}$ donc $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$

c)



3)

a) R est la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{12}$

b) $z_C = z_A \times e^{-i\frac{\pi}{12}} = 2e^{i\frac{\pi}{4}} \times e^{-i\frac{\pi}{12}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}\right)} = 2e^{i\frac{2\pi}{12}} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

Donc $z_C = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}+i$

4)

a) $z_D = z_B - 2\sqrt{2} = \sqrt{2} - i\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

b) $z_D = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ et $z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ donc $z_D = -z_A$

Donc D est le symétrique de A par rapport à O. Donc [AD] est le diamètre du cercle de centre O et de rayon 2. Or C est sur ce cercle puisque C est l'image de A par R. Donc ACD est un triangle rectangle en C

Exercice 2

Question n°1 : f(x) = k e^{2x} avec k réel

Question n°2 :

a) La probabilité que Tom ait gagné de l'argent est 0,0322
b) E(X) = - 3,01

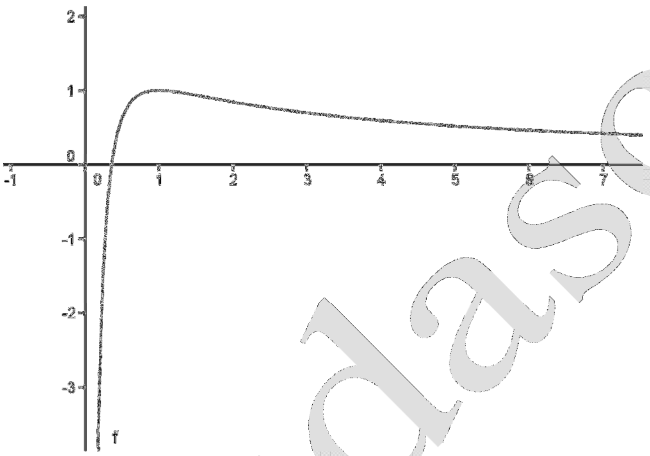
Question n°3 : Proposition 2 – Après avoir tiré la première boule, on ne l'a pas remise dans l'urne avant de tirer la deuxième.

Problème

Partie A

1)

a)



b)

x	0		1		+00
f'(x)			0		
f	-00	↗	1	↘	0

2)

a) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - (1+\ln(x))}{x^2}$ = $\dfrac{1-1-\ln(x)}{x^2}$ = $-\dfrac{\ln(x)}{x^2}$

$X^2 > 0$ donc f '(x) est du signe de – ln(x)

b) Sur]0 ;1] $\ln(x) \leq 0$ donc $-\ln(x) \geq 0$ donc $f'(x) \geq 0$ et f est croissante

Sur $[1;+\infty[$ $\ln(x) \geq 0$ donc $-\ln(x) \leq 0$ donc $f'(x) \leq 0$ et f est décroissante

c) $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} 1+\ln(x) = -\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\ln(x)}{x} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$f(1) = \dfrac{1+\ln(1)}{1} = 1$

Les résultats de2) a) b) et c) confirment le tableau de variations du 1) b)

<u>Partie B</u>

1) Γ coupe l'axe des abscisses quand f(x) = 0 donc $\dfrac{1+\ln(x)}{x} = 0$ donc 1 + ln(x) = 0 donc ln(x) = - 1

donc $x = e^{-1}$

2) B le point d'abscisse $e^{-0,5}$ et $f(e^{-0,5})$ = $\dfrac{1+\ln(e^{-0,5})}{e^{-0,5}} = \dfrac{1-0,5}{e^{-0,5}} = 0,5e^{0,5}$

De plus $f'(e^{-0,5}) = -\dfrac{\ln(e^{-0,5})}{\left(e^{-0,5}\right)^2} = -\dfrac{-0,5}{e^{-1}} = 0,5e$

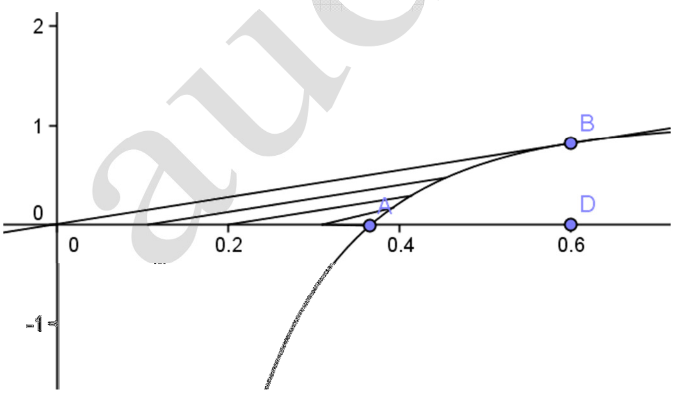
La tangente à Γ en B a pour équation : y = $f'(e^{-0,5})(x-e^{-0,5}) + f(e^{-0,5}) = 0,5e(x-e^{-0,5}) + 0,5e^{0,5}$

Soit y = $0,5ex - 0,5e^{1-0,5} + 0,5e^{0,5}$ = 0,5 e x

Cette droite passe par B et par O donc la tangente en B à Γ est bien la droite (OB).

<u>Partie C</u>

1)



2)

a) L'aire de OBD = $\dfrac{OD \times BD}{2} = \dfrac{e^{-0,5} \times 0,5e^{0,5}}{2} = \dfrac{0,5}{2} = \dfrac{1}{4}$

b) L'aire de $\Delta_1 = \int_{e^{-1}}^{e^{-0,5}} f(x)dx$

c) L'aire de $\Delta_2 =$ L'aire de OBD moins L'aire de Δ_1 = $\dfrac{1}{4} - \int_{e^{-1}}^{e^{-0,5}} f(x)dx$

3) g(x) = $\dfrac{1}{2}(\ln(x))^2 + \ln(x)$

a) $g'(x) = \dfrac{1}{2} \times 2\ln(x) \times \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{\ln(x)}{x} \times \dfrac{1}{x} = f(x)$ donc g est une primitive de f sur $]0;+\infty[$

b) L'aire de $\Delta_2 = \dfrac{1}{4} - \int_{e^{-1}}^{e^{-0,5}} f(x)dx = \dfrac{1}{4} - g(e^{-0,5}) + g(e^{-1})$

$= \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}\ln(e^{-0,5})^2 - \ln(e^{-0,5}) + \dfrac{1}{2}\ln(e^{-1})^2 + \ln(e^{-1})$

$= \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} \times (-0,5)^2 - (-0,5) + \dfrac{1}{2} \times (-1)^2 + (-1)$

$= \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - 1 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{8}$ unités d'aire.