Série ES

France métropolitaine 23 juin 2010 : Corrigé

Exercice 1

Question 1 : $\ln(e^x) = -3$

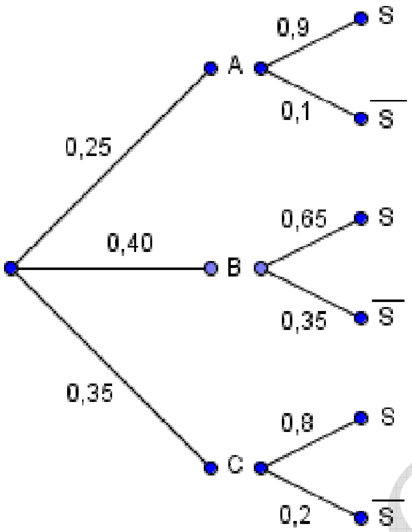
Question 2 : $-\frac{1}{4}$

Question 3 : y = x + 2

Question 4 : - 1

Exercice 2

1)



2) $p(A \cap S) = p(A) \times p_A(S) = 0{,}25 \times 0{,}9 = 0{,}225$

3) $p(S) = p(A \cap S) + p(B \cap S) + p(C \cap S)$ d'après la formule des probabilités totales

Donc $p(S) = p(A) \times p_A(S) + p(B) \times p_B(S) + p(C) \times p_C(S) = 0{,}225 + 0{,}4 \times 0{,}65 + 0{,}35 \times 0{,}8 = 0{,}765$

4) $p_S(C) = \frac{p(C \cap S)}{p(S)} = \frac{0{,}35 \times 0{,}8}{0{,}765} = \frac{0{,}28}{0{,}765} = 0{,}366$

Exercice 2 : (Spécialité)

F(x ; y) = $x^2 - 2x + y^2 - 4y + 6$

1) 120 sièges de luxe soit 1,2 centaines

160 sièges de confort soit 1 ,6 centaines

F(1,2 ; 1,6) = $1{,}2^2 - 2 \times 1{,}2 + 1{,}6^2 - 4 \times 1{,}6 + 6 = 1{,}2$

Le coût mensuel de production pour 120 sièges de luxe et 160 sièges de confort est de 1,2 dizaine de milliers d'euros soit 12 000 euros .

2) $(x-1)^2+(y-2)^2+1=x^2-2x+1+y^2-4y+4+1=x^2-2x+y^2-4y+6$

Donc F(x ; y) = $x^2-2x+y^2-4y+6=(x-1)^2+(y-2)^2+1$

Pour que le coût de production mensuel soit minimal il faut que $(x-1)^2$ et que $(y-2)^2$ soient minimaux.

Comme des carrés sont toujours positifs, leurs minima sont 0.

Donc $(x-1)^2=0$ et $(y-2)^2=0$

Donc x = 1 et y = 2

Dans ce cas : F(1 ; 2) = 1

Le coût de production mensuel minimal est donc de 10 000 €. Pour que ce coût soit obtenu, il faut produire mensuellement 100 sièges de luxe et 200 sièges de confort.

3)

a) Soit x la quantité de sièges de luxe exprimée en centaines et soit y la quantité de sièges de confort exprimée en centaines. La production mensuelle prévue est de 250 sièges, soit 2,5 centaines.
On a donc x + y = 2,5 et donc y = 2 ,5 - x
Donc F(x ; y) = F(x ; 2,5 - x) = x^2 - 2x + $(2,5 - x)^2$ - 4(2,5 - x) + 6 = $2x^2$ - 3x + 2,25

b) f(x) = $2x^2$ - 3x + 2,25 D = [0 ; 2,5]
f ‘(x) = 4x - 3

f ‘(x) = 0 $\Leftrightarrow$ 4x - 3 = 0 $\Leftrightarrow$ $x=\frac{3}{4}=0,75$

f(0) = 2,25 ; f(0,75) = 1,125 et f(2,5) = 7,25

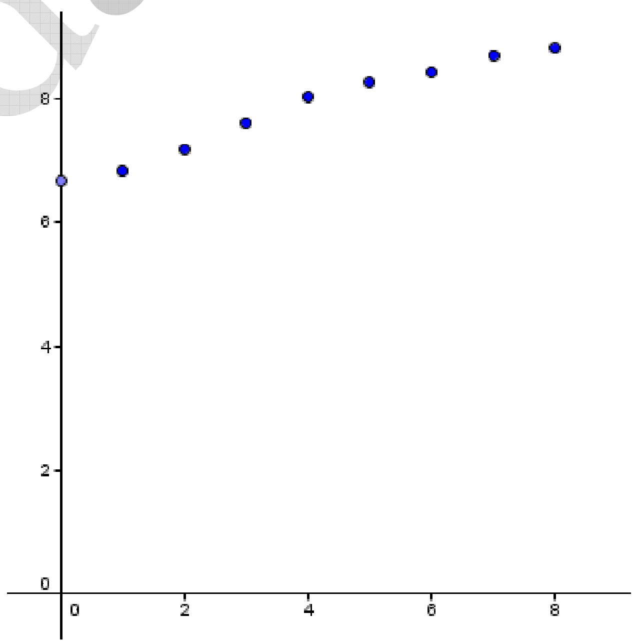
x	0		0,75		2,5
f '(x)		−	0	+	
f	2,25	↘	1,125	↗	7,25

c) D’après le tableau de variations, f admet un minimum pour x = 0,75. Ce minimum est f(0,75) = 1,125
Si x = 0,75 alors y = 2,5 - 0,75 = 1,75
L’équipementier doit produire 75 sièges de luxe et 175 sièges confort pour minimiser le coût mensuel de production. Le coût mensuel de production minimal ainsi obtenu est de 11 250 €.

Exercice 3

Partie A

1)



2) $\dfrac{8{,}82-6{,}67}{6{,}67}\times 100$ = 32,23 %

Entre 2001 et 2009, la valeur du SMIC horaire brut a augmenté de 32,23 %

3) Soit t le pourcentage annuel moyen .

$$6{,}67\left(1+\frac{t}{100}\right)^4=8{,}03 \quad \text{donc} \quad \left(1+\frac{t}{100}\right)^4=\frac{8{,}03}{6{,}67} \quad \text{donc} \quad 1+\frac{t}{100}=\left(\frac{8{,}03}{6{,}67}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Donc $t=\left[\left(\dfrac{8{,}03}{6{,}67}\right)^{\frac{1}{4}}-1\right]\times 100$ donc t = 4,75 %

Donc le pourcentage annuel moyen d'augmentation de la valeur du SMIC horaire brut entre 2001 et 2005 est de 4,75 %

Partie B

1) En 2012, n = 7

$8{,}03\times 1{,}024^7=9{,}48$

En 2012, la valeur du SMIC horaire brut sera de 9,48 €

2) $8{,}03\times 1{,}024^n>10$ donc $1{,}024^n>\dfrac{10}{8{,}03}$ donc $\ln\left(1{,}024^n\right)>\ln\left(\dfrac{10}{8{,}03}\right)$

Donc $n\ln(1{,}024)>\ln\left(\dfrac{10}{8{,}03}\right)$ et donc $n>\dfrac{\ln\left(\frac{10}{8{,}03}\right)}{\ln(1{,}024)}\approx 9{,}25$ donc $n\geq 10$

Donc à partir de 2015, la valeur du SMIC horaire brut dépassera 10 €.

Exercice 4

Fonction offre : f(x) = $153e^{0{,}05x}$ D = [0 ; 35]

Fonction demande : g(x) = - 116 ln(x + 1) + 504 D = [0 ; 35]

1)

a) f '(x) = $153\times 0{,}05e^{0{,}05x}=7{,}65e^{0{,}05x}$

$7{,}65>0$ et $e^{0{,}05x}>0$ donc f '(x) > 0 pour tout x de D

Donc f est strictement croissante sur [0 ; 35]

b) g(x) = - 116 ln(x + 1) + 504

g '(x) = $-\dfrac{116}{x+1}$

Sur [0 ; 35], x + 1 > 0 et - 116 < 0 donc g '(x) < 0 pour tout x de [0 ; 35]

Donc g est strictement décroissante sur [0 ; 35]

c) E est le point d'intersection des courbes f et g.

E (8,9 ; 238,4)

2)

a) h(x) = f(x) - g(x) donc h '(x) = f '(x) - g '(x) = $7{,}65e^{0{,}05x}+\dfrac{116}{x+1}$

or $7{,}65e^{0{,}05x}>0$ et $\dfrac{116}{x+1}>0$ donc h '(x) > 0 pour tout x de [0 ; 35]

Donc h est strictement croissante sur [0 ; 35]

Autre méthode

h(x) = f(x) - g(x)
d'après 1 a) f est strictement croissante sur [0 ; 35]
1 b) g est strictement décroissante sur [0 ; 35].
Donc - g est strictement croissante sur [0 ; 35]
Donc, par addition, h est strictement croissante sur [0 ; 35]

b) h est continue et strictement croissante sur [0 ; 35].
h(0) = f(0) - g(0) = $153e^{0} - (-116\ln 1 + 504) = -351 < 0$
h(35) = f(35) - g(35) = $153e^{1,75} - (-116\ln(36) + 504) = 792 > 0$
Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation h(x) = 0 admet une unique solution x_0 dans [0 ; 35]

c) h(8,87) = - 0,0209 < 0
h(8,871) = 0,00279 > 0
Donc x_0 = 8,871

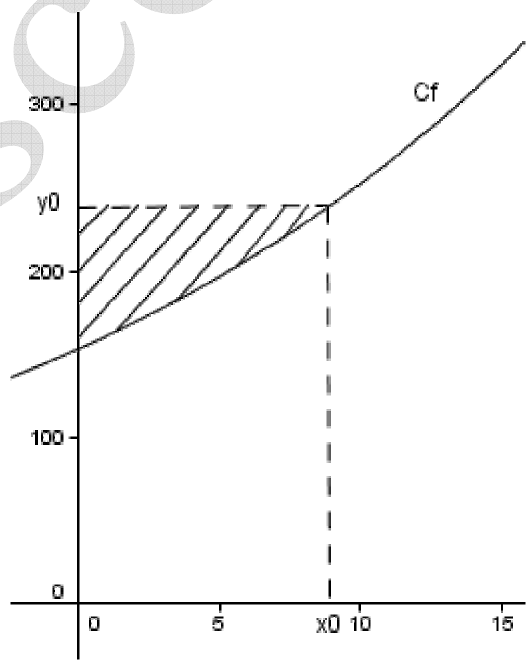
d) $y_0 = f(x_0) = f(8,871) = 153e^{0,05\times 8,871} \approx 238,41$

e) y_0 = 238,41
Le prix unitaire d'équilibre de cet appareil est de 238,41 €
x_0 = 8,871 et x_0 représente la quantité d'appareils pouvant être vendue. Donc au prix de 238,41 €, on peut vendre 8871 appareils.

3)

a) f(x) = $153e^{0,05x}$ donc F(x) = $153\times\dfrac{1}{0,05}e^{0,05x} = 3060e^{0,05x}$ est une primitive de f.

b)



S = $x_0 y_0 \times \int_0^{x_0} f(x)dx = 8,871\times 238,41 - (F(x_0) - F(0)) = 8,871\times 238,41 - \left(3060e^{0,44355} - 3060\right)$
S = 406,754 u.a.