<u>LES NOMBRES COMPLEXES</u> :

<u>PARTIE 1 : CALCULS ET INTERPRETATIONS GRAPHIQUES</u>

Terminales S, Enseignement Obligatoire

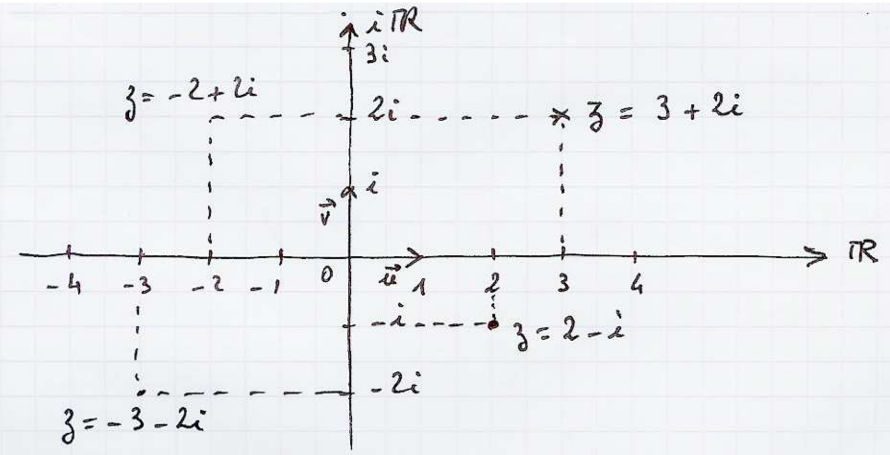
I- <u>Introduction</u>

1) <u>Approche numérique : Extension de $\Re$ l'ensemble des réels</u>

Dans $\Re$, une équation du 2nd degré dont le Δ est négatif n'a pas de solution. Nous inventons donc de nouveaux nombres, les complexes, pour que de telles équations aient des solutions.
Ces nombres sont de la forme z = x + iy où x et y sont des réels et où i est un nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$ (voir II pour la résolution de telles équations)

2) <u>Approche géométrique</u>

L'ensemble des réels $\Re$ peut être représenté par une droite. De même C , l'ensemble des complexes, peut être représenté par un plan rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{u}, \vec{v})$ dont l'axe des abscisses $0\vec{u}$ est la droite des réels et dont l'axe des ordonnées $0\vec{v}$ est la droite des « imaginaires purs » c'est-à-dire les nombres de la forme iy où $i^2 = -1$ et $y \in \Re$



II- <u>Définitions et règles de calcul</u>

1) <u>Propriétés</u> : Les opérations de $\Re$, addition, soustraction, multiplication, ont les même propriétés dans C que dans $\Re$:

- $(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i\,(y + y')$
- $(x + iy) - (x' + iy') = (x - x') + i\,(y - y')$
- $(x + iy)\,.\,(x' + iy') = xx' + ixy' + ix'y + i^2yy' = xx' - yy' + i\,(xy' + x'y)$

2) <u>Définitions</u> :

Soit z = x + iy un nombre complexe avec $x \in \Re$, $y \in \Re$

- x = partie réelle de z = Re(z)
- y = partie imaginaire de z = Im(z)
- le conjugué de z, noté $\bar{z}$, est le complexe tel que $\bar{z} = x - iy$
  a) si $x \in \Re$, $\bar{x} = x$
  b) si $y \in \Re$, $\overline{iy} = -iy$, en particulier $\bar{i} = -i$
  c) $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - ixy + ixy - i^2y^2 = x^2 - (-1)\,y^2 = x^2 + y^2$

  donc $z\bar{z} = x^2 + y^2 \in \Re^+$

  d) $\bar{\bar{z}} = z$
- Quand on écrit un complexe z sous la forme z = x + iy on dit que z est sous sa <u>forme algébrique</u>.

3) Propriétés : Soit $z \in$ C et $\bar{z}$ son conjugué

- $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ c'est un réel. $z - \bar{z} = 2\,i\,\mathrm{Im}(z)$ c'est un imaginaire pur.
- $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- $\overline{zz'} = \bar{z}\,\bar{z}'$
- $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{z}'}$
- $\overline{\left(z^n\right)} = \left(\bar{z}\right)^n$

4) Division par un nombre complexe :

Pour mettre sous forme algébrique la division de deux nombres complexes, on multiplie en haut et en bas par le conjugué du dénominateur.

En effet :

$$\frac{x+iy}{x'+iy'} = \frac{(x+iy)(x'-iy')}{(x'+iy')(x'-iy')} = \frac{xx'+yy'+i(x'y-xy')}{x'^2+y'^2} = \frac{xx'+yy'}{x'^2+y'^2} + i\frac{x'y-xy'}{x'^2+y'^2}$$ qui est bien une forme algébrique.

5) Equations du second degré : $az^2 + bz + c = 0$

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$ avec **a, b et c réels**

- On sait déjà que $az^2 + bz + c = 0$ admet 1 ou 2 solutions réelles quand Δ est positif ou nul.
- Si Δ est négatif $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées:

  $z_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $z_2 = \bar{z}_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

III- Interprétations Géométriques

1) Forme algébrique : Coordonnées cartésiennes.

Nous avons vu que nous pouvions représenter un nombre complexe dans un plan rapporté à un repère orthonormal (0, $\vec{u}$, $\vec{v}$). Le nombre complexe z = x + i y est alors représenté par le point de coordonnées (x;y).

Nous avons donc dans (0, $\vec{u}$, $\vec{v}$), les mêmes propriétés que dans le plan affine (0, I, J) ou que dans le plan vectoriel (0, $\vec{i}$, $\vec{j}$)

- Donc à tout complexe z = x +iy nous pouvons associer le point M(x ; y)
  On dit que z est l'affixe de M
- De même si z_A est l'affixe de A et z_B l'affixe de B on dira que l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$.

2) Coordonnées polaires, module et argument

Soit M le point d'affixe z = x +iy,

- La distance OM = $\sqrt{x^2 + y^2}$ (puisque nous sommes dans un repère orthonormé).

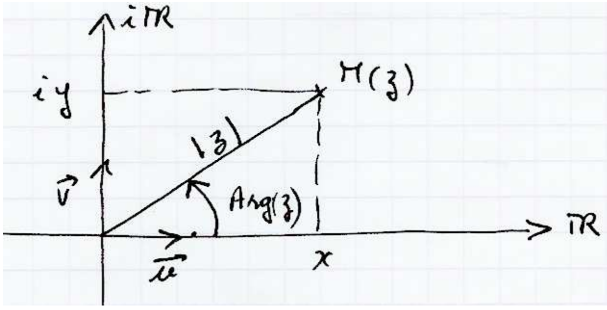
  Nous appellerons module de z, noté $|z|$, ce nombre

  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

  Remarques :
  - $|z|^2 = z\,\bar{z}$
  - $|z| \in \Re^+$
- L'angle ($\vec{u}$, $\overrightarrow{OM}$) orienté est appelé Argument de z, noté arg(z)

- En résumé, si un nombre complexe z est l'affixe de M
  - si z = x +iy est sa forme algébrique, x et y sont les coordonnées cartésiennes de M
  - et $|z|$, arg(z) sont les coordonnées polaires de M.

Nous pouvons donc remarquer (en faisant référence aux coordonnées polaires) que si
z = x + iy, x = $|z|\cos[Arg(z)]$ et y = $|z|\sin[Arg(z)]$



- <u>Définition</u>. : On peut donc écrire : z = $|z|(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ avec ϑ = arg(z)

  Ceci est appelé <u>*la forme trigonométrique*</u> de z

- <u>Propriétés du module</u> :
  - $|zz'| = |z| \times |z'|$
  - $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ si z' $\neq 0$
  - $|z^n| = |z|^n$
  - $|z+z'| \leq |z| + |z'|$
  - $|\bar{z}| = |z|$
  - $|z|^2 = z\bar{z}$

- <u>Propriétés de l'argument</u> :
  - Arg(zz') = Arg(z) + Arg(z') $[2\pi]$
  - Arg$\left(\frac{z}{z'}\right)$ = Arg(z) – Arg(z') $[2\pi]$
  - Arg(z^n) = n Arg(z) $[2\pi]$
  - Arg($\bar{z}$) = - Arg(z)
  - Arg(-z) = π + Arg(z)

- <u>Remarque</u> : Arg(z^n) = n Arg(z) $[2\pi]$ est une conséquence directe de la

  <u>Formule de Moivre</u> : $(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^n = \cos(n\vartheta) + i\sin(n\vartheta)$