LES NOMBRES COMPLEXES :

Partie 2 : Notation exponentielle et géométrie

Terminales S, Enseignement Obligatoire

I. Notation exponentielle

Nous avons vu dans la partie 1 qu'un nombre complexe peut s'écrire sous forme algébrique : z = x + i y ou sous forme trigonométrique : z = |z| (cos ϑ + i sin ϑ) où |z| est le module de z et ϑ l'argument de z.

Def. : On note : $e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$

Conséquence : soit z∈ C, tel que $z = |z|(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ avec $\vartheta = \arg(z)$

On a $z = |z|\,e^{i\vartheta}$. Ceci est la notation exponentielle de z

Remarque :

- Cette notation exponentielle rend évidentes les propriétés énoncées dans la partie 1 sur les arguments.
- Elle sera donc utilisée en priorité pour les multiplications, divisions et puissances de nombres complexes.

II. Base de la géométrie plane avec les complexes.

- En règle générale, les modules représentent toujours des distances, et les arguments des angles.
- Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) et M étant le point d'affixe z,

  |z| = OM et $\arg(z) = \left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)$
- A et B étant deux points d'affixes respectives z_A et z_B :

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$

La distance AB = $|z_B - z_A|$

L'angle $\left(\vec{u};\overrightarrow{AB}\right) = \arg(z_B - z_A)$

- L'affixe du milieu de [AB] est $\dfrac{z_A + z_B}{2}$
- Plus généralement, l'affixe du barycentre G du système de points pondérés (A ;a) (B ;b) (C ;c) est :

  $z_G = \dfrac{az_A + bz_B + cz_C}{a+b+c}$

III. Etude du complexe $Z = \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$

Considérons 4 points A, B, C et D d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D.

Etudions le complexe $Z = \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$

1) Module

$$|Z| = \left|\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right| = \frac{|z_D - z_C|}{|z_B - z_A|}$$

or $|z_D - z_C| = \left\|\overrightarrow{CD}\right\|$ puisque $z_D - z_C$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{CD}$

et $|z_B - z_A| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$

donc $|Z| = \dfrac{\left\|\overrightarrow{CD}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|} = \dfrac{CD}{AB}$ $\qquad |Z| = \dfrac{CD}{AB}$

2) Argument

$\arg(Z) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A)$

Or dans le repère orthonormé $(0, \vec{u}, \vec{v})$, $\arg(z_D - z_C) = (\vec{u}, \overrightarrow{CD})$

et $\arg(z_B - z_A) = (\bar{u}, \overline{AB})$

Donc $\arg(Z) = (\vec{u}, \overrightarrow{CD}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = (\vec{u}, \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{AB}, \vec{u})$

$= (\overrightarrow{AB}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{CD})$

donc $\arg(Z) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$

3) Applications

Ces deux résultats sont très importants car ils sont utilisés dans une grande majorité d'exercices du BAC.

Bien souvent on calcule le module et l'argument d'un complexe de la forme $Z = \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ et on en fait une interprétation géométrique.

Exemples :

- $Z = \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = 1$

  $|Z| = 1 \iff \frac{CD}{AB} = 1 \iff CD = AB$

  $\arg(Z) = 0\ (2\pi) \iff (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0\ (2\pi) \Rightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires de même sens

  Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

  Et donc ABDC est un parallèlogramme.

- $Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i \Rightarrow$ Module : $|Z| = 1 \Rightarrow AC = AB$

  $\Rightarrow$ ABC triangle isocèle en A

  Argument : $\arg(Z) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi) \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi) \Rightarrow$ ABC triangle rectangle en A

  donc : ABC triangle rectangle et isocèle en A

- $Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

  Donc $|Z| = 1 \Rightarrow$ ABC isocèle en A

  $\arg(Z) = \frac{\pi}{3}$ donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$ et ABC isocèle $\Rightarrow$ ABC triangle équilatéral

- Autres exemples : $Z = \frac{z - z_B}{z - z_a}$ avec z affixe d'un point M inconnu

  ATTENTION : $z \neq z_A \iff M \neq A$

  - $|Z| = 1 \iff MB = MA$

    donc M est sur la médiatrice de $[AB]$

- $Z \in \Re \iff \arg Z = 0 + k\pi$, $k \in Z$
  $\iff (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = 0 + k\pi$, $k \in Z$
  $\iff$ M est sur la droite (AB) privée de A

- $Z \in \Re^+ \iff \text{Arg } Z = 0 + 2k\pi \quad k \in Z$
  $\iff (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = 0 + 2k\pi \quad k \in Z$
  $\iff$ M est sur la droite (AB) privée du segment $[AB]$

- $Z \in \Re^- \iff \text{Arg } Z = \pi + 2k\pi$
  $\iff (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = \pi + 2k\pi$
  $\iff$ M est sur le segment $[AB]$ privé de A

- $Z \in i\Re$, Z imaginaire pur
  $\iff \text{Arg}Z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in Z$
  $\iff (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in Z$
  $\iff$ AMB triangle rectangle en M
  $\iff$ M est sur le cercle de diamètre $[AB]$ privé de A

- <u>Remarque</u> : si on trouve $|z - z_A| = r$, $M_{(z)}$ est sur le cercle de centre A et de rayon r

V <u>Transformations géométriques</u>

1) Translations

T est une translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $z_{\vec{w}}$

Alors si $t : M_{(z)} \to M'_{(z')}$, $z' = z + z_{\vec{w}}$

En effet, si $t : M \to M'$, $\overrightarrow{MM'} = \vec{w}$

$\iff z' - z = z_{\vec{w}}$

$\iff z' = z + z_{\vec{w}}$

2) Rotations

a) <u>$r_{o,\alpha}$ la rotation de centre 0 et d'angle α</u>

si $r_{o,\alpha} : M \to M'$

$\|\overrightarrow{OM}\| = \|\overrightarrow{OM'}\| \iff |z| = |z'|$

et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha \ (2\pi) \iff \text{Arg } z' - \text{Arg } z = \alpha \ (2\pi)$

$\iff \text{Arg } z' = \text{Arg } z + \alpha \ (2\pi)$

donc si $z = |z| e^{i\vartheta}$, $z' = |z| e^{i(\vartheta+\alpha)} = |z| e^{i\vartheta} \times e^{i\alpha}$

$\iff z' = z e^{i\alpha}$

b) Rotation de centre A et d'angle α : r $_{A,\alpha}$

si r $_{A,\alpha}$: M $\rightarrow$ M'

$\|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{AM'}\| \Leftrightarrow |z-a| = |z'-a|$ avec a affixe de A

$\Leftrightarrow \left|\frac{z'-a}{z-a}\right| = 1$

$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = \alpha\,(2\pi) \Leftrightarrow$ Arg(z'-a) – Arg(z-a)= $\alpha\,(2\pi)$

$\Leftrightarrow$ Arg$\left(\frac{z'-a}{z-a}\right) = \alpha\,(2\pi)$

Ce qui peut se résumer par $\frac{z'-a}{z-a} = e^{i\alpha}$

Ou encore z'- a = (z - a) $e^{i\alpha}$

c) Remarque

Soit f une transformation du plan telle que f : M $\longrightarrow$ M'
Avec z' = $e^{i\alpha}$ z + c, avec α réel non nul et c$\in$ C
Alors : f est une rotation d'angle α

3) Homothéties

h $_{A,k}$: homothétie de centre A et de rapport k,

si h $_{A,k}$: M $\rightarrow$ M'

alors on a : $\overrightarrow{AM'}$ = k $\overrightarrow{AM}$
d'où en complexes : z' – a = k × (z – a)

Remarque :
Soit f une transformation du plan telle que f : M $\longrightarrow$ M'
Avec z' = k z + c, avec k réel différent de 1 et c$\in$ C
Alors : f est une homothétie de rapport k